$f(x) \in \mathbb{Q}[x]$

Supponiamo che $f(x)$ ammetta radici multiple in $\mathbb{C}[x]$

$$f(x) = (x-\alpha)^2 g(x)$$
$$f'(x) = (x-\alpha)[2g(x) + (x-\alpha)g'(x)]$$

Per minimalità del polinomio minimo di α
(i polinomi in $F[x]$ che ammettono α come radice costituiscono un ideale, principale generato da $m(x)$, polinomio minimo)

$$\begin{array}{l} m(x) \mid f(x) \\ m(x) \mid f'(x) \end{array} \Rightarrow m(x) \mid MCD_{\mathbb{Q}[x]}(f, f')$$

$$MCD_{\mathbb{Q}[x]}(f, f') \mid f$$

I fattori di f hanno grado 0 o $n = \deg f$

Poiché $\deg MCD_{\mathbb{Q}[x]} \leq \deg f' < n$, $\deg MCD_{\mathbb{Q}[x]}$ non può essere n.

Allora
- $f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) \in \mathbb{Q}$ ✓
- $MCD_{\mathbb{Q}[x]}(f, f') = 1 \Rightarrow \deg m(x) = 0$ assurdo!